

Principe du maximum discret pour une solution au sens des moindres carrés espace-temps pour l'équation de transport avec des éléments finis

K.Benmansour^{a, b}, L.Piffet^a and J.Pousin^{a 1}

^a Université de Lyon , INSA de Lyon ICJ UMR CNRS 5208

20 Av. A. Einstein France

Email:prenom.nom@insa-lyon.fr

^b Université Abou Bekr Belkaid de Tlemcen

Département de mathématiques Faculté des sciences Université de Tlemcen BP 119 Algerie

Abstract. In this note, we deal with a least squares formulation for the transport equation. Some numerical schemes are proposed in order that a discret maximum principle holds true. This schemes are obtained by considering optimization problems subject to constraints.

Key words: Transport equation, space-time least squares methods, total variation.

AMS subject classification: 35F15 35J70 65M30 65M60 .

1. Introduction

Résoudre l'équation du Transport au sens des moindres carrés est nécessaire dans de nombreuses applications physiques, et en imagerie par exemple, où il est souvent nécessaire de rajouter des contraintes à l'équation du Transport (appelée flot optique) comme une condition finale dans le cas du recalage.

Le principe du maximum (PM) est satisfait par la formulation continue au sens des moindres carrés, et sa démonstration demande un argument de type perturbation singulière. Le problème approché par une méthode d'éléments finis de Lagrange y compris à l'ordre un ne vérifie pas le PM. Afin d'imposer le principe du maximum discret (PMD) nous proposons une modification de la méthode de Galerkin en y adjoignant des contraintes d'inégalité. Mentionnons [4] et [2] où une stratégie similaire a été utilisée et analysée, dans un contexte algébrique pour le premier et pour des méthodes ALE pour le second. Dans ce travail, d'une part, nous proposons une méthode de Nitsche pour prendre en compte les conditions aux limites sur le bord entrant. D'autre part, nous proposons

¹Corresponding author. E-mail: jerome.pousin@insa-lyon.fr

d'introduire une contrainte de non négativité pour la solution afin d'éviter les undershooting en utilisant la méthode de marche en temps, et de rajouter une contrainte de régularité concernant la variation totale de la solution pour un problème global en temps afin d'éviter les overshooting.

Le papier est organisé de la manière suivante. A la section 2. le problème au sens des moindres carrés est introduit. La section 3. présente le problème discrétisé, un résultat numérique et la méthode de Nitsche est introduite. Dans la section 4. des méthodes d'optimisation avec contraintes pour contrôler les oscillations sont introduites.

2. Description du problème

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine de frontière lipschitzienne $\partial\Omega$ satisfaisant la propriété du cône. Si $T > 0$ est donnée, soit $Q = \Omega \times]0, T[$. Considérons une vitesse d'advection $v : Q \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $f \in L^2(Q)$ un terme source donné. Dans tout ce papier la vitesse v vérifie au moins la régularité suivante: $v \in L^\infty(Q)^d$; et $\operatorname{div} v \in L^\infty(Q)$. Soit $\Gamma_- = \{x \in \partial\Omega : (v(x, t) \mid n(x)) < 0\}$ où $n(x)$ est la normale extérieure de $\partial\Omega$ au point x . On suppose que Γ_- ne dépend pas de t .

Le problème consiste à trouver une fonction $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant:

$$\begin{cases} \partial_t u + (v(x, t) \mid \nabla u(x, t)) = f & \text{dans } Q \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{pour } x \text{ dans } \Omega \\ u(x, t) = u_1(x, t) & \text{pour } x \text{ sur } \Gamma_- \end{cases} \quad (2.1)$$

Quand u_1, u_0 , et u sont suffisamment régulières, en changeant le terme source f si nécessaire, on peut supposer que $u_1 = 0$ sur Γ_- , et $u_0 = 0$ sur Ω . Le cadre fonctionnel pour une formulation variationnelle du problème (2.1) est donné, pour v régulière. On définit \tilde{v} par $\tilde{v} = (1, v_1, v_2, \dots, v_d)^t$ et pour une fonction suffisamment régulière φ définie sur Q ,

soit $\tilde{\nabla}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_d}\right)^t$, le produit scalaire euclidien est noté $(\cdot \mid \cdot)$. Soit

$$\partial Q_- = \{(x, t) \in \partial Q, (\tilde{v} \mid \tilde{n}) < 0\} = \Gamma_- \times (0, T) \cup \Omega \times \{0\},$$

où \tilde{n} désigne le vecteur normal extérieure unitaire sur ∂Q , et

$$u_b(x, t) = \begin{cases} u_0(x) & \text{si } (x, t) \in \Omega \times \{0\} \\ u_1(x) & \text{si } (x, t) \in \Gamma_- \times (0, T). \end{cases}$$

Les espaces de Sobolev anisotropes

$$H(v, Q) = \left\{ \varphi \in L^2(Q), (\tilde{v} \mid \tilde{\nabla}\varphi) \in L^2(Q), \right\}$$

et $H_0 = H_0(v, Q, \partial Q_-) = \{\varphi \in H(v, Q), \varphi = 0 \text{ sur } \partial Q_-\}$ sont introduits. Une formulation du problème (2.1) au sens des moindres carrés est donnée par:

$$\rho = \operatorname{argmin}_{w \in H_0} \int_Q ((\tilde{v} \mid \tilde{\nabla} w) - f)^2 dt dx = \operatorname{argmin}_{w \in H_0} J(w).$$

La fonctionnelle J est convexe, continue et dérivable. La dérivée de Gâteaux de J est $DJ(\rho)\varphi = \int_Q \left((\tilde{v} | \tilde{\nabla} \rho) - f \right) (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi) dx dt$. Donc, une condition nécessaire pour obtenir la solution au sens des moindres carrés de (2.1) est la *formulation faible* suivante: Trouver $\rho \in H_0$ tel que

$$\int_Q (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \rho) (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi) dx dt = \int_Q f (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi) dx dt \quad (2.2)$$

pour tout $\varphi \in H_0$.

Theorem 1. *Pour v régulière, et $f \in L^2(Q)$, le problème (2.1) admet une unique solution $u = \rho + (1 - t)u_b$. En outre, pour $f = 0$, u satisfait le principe du maximum : $\inf u_b \leq u \leq \sup u_b$.*

Proof. La démonstration du principe du maximum demande d'utiliser une méthode de perturbation singulière, elle est donnée dans [5] \square

3. Problème Discrétisé

Soit $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ une base du sous-espace d'éléments finis $V_h \subset H_0$, obtenue, par exemple, pour un maillage du domaine Q , avec des éléments finis du type $Q1$. Une approximation du problème consiste à trouver $\rho_h = \sum_{j=1}^N \varphi_j(t, x) \cdot \rho_j$ tel que $\forall \varphi_i, \sum_{j=1}^N \rho_j \int_Q (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_j) (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_i) dx dt = \int_Q f (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_i) dx dt$.

3.1. Exemple numérique

Considérons le problème de l'équation de transport avec condition initiale non nulle et une vitesse constante pour $\Omega = (0, 1)$

$$\partial_t u + \partial_x u = 0 \quad \text{dans } Q \quad (3.1)$$

avec $u(x, 0) = u_0(x) = \frac{1}{2}(1 - \tanh(100x - 50))$, et on résout par la méthode de marche en temps² pour un seul pas de temps et pour 20 pas de temps avec 80 points en espace, en respectant le CFL on peut obtenir le pas de temps maximal (ici, le pas de temps est égale au pas d'espace). La figure 1(a) représente la solution pour un seul pas de temps, la figure 1(b) représente la solution pour 20 pas de temps. Malgré les oscillations présentes en (a) et (b), la méthode converge comme il est montré en figure 1(c) où nous avons 1000 points en espaces.

²Puisque on suppose que $\tilde{v}_1 > 0$, alors toutes les courbes sont croissantes par rapport au temps donc la méthode de marche en temps est possible. Le principe de cette méthode: À chaque pas de temps on résout un problème "local en temps", où l'état initial est l'état au pas de temps courant et l'inconnu est l'état au pas de temps suivant. Ce qui revient à prendre successivement $Q = \Omega \times (t^n, t^{n+1})$.

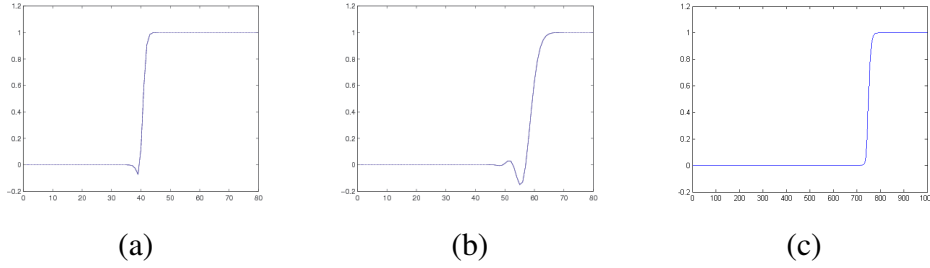


Figure 1: (a) Solution pour un pas de temps. (b) Solution pour 20 pas de temps. (c) Convergence de la solution

3.2. Méthode de Nitsche

La méthode de Nitsche consiste à déterminer l'approximation de la solution dans un sous espace d'éléments finis $V_h \subset H(v, Q)$ tel que: $\forall \varphi_i$,

$$\sum_{j=1}^N \rho_j \int_Q \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_j \right) \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_i \right) dx dt + 1/\gamma \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\partial Q_-} \varphi_j \varphi_i - \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\partial Q_-} \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_j \right) \varphi_i = 1/\gamma \sum_{j=1}^N u_{b,j} \int_{\partial Q_-} \varphi_j \varphi_i \text{ avec } \gamma \text{ quelconque.}$$

Considérons le même exemple numérique, et en utilisant la méthode de marche en temps, on obtient les résultats dans la figure2 ci-dessous pour un seul pas de temps et pour 20 pas de temps avec un pas d'espace $h = 1/80$ et un pas de temps $\tau = 1/100$.

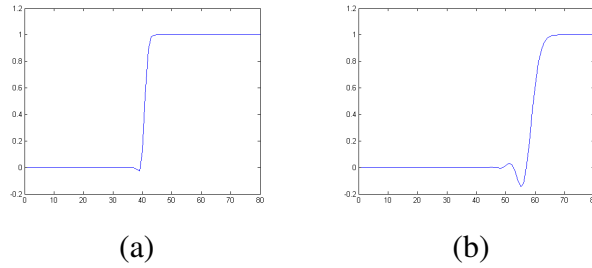


Figure 2: (a) Solution pour un pas de temps. (b) Solution pour 20 pas de temps.

4. Méthodes d'optimisation avec contraintes

4.1. Contrainte de non négativité

Afin d'avoir une solution positive nous transformons notre problème en un problème de minimisation sous contrainte. Trouver $\rho_p \in \mathbb{R}^N$ vérifiant :

$$\begin{cases} A\rho_p = F \\ \rho_p \geq 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Une formulation avec multiplicateur généralisé s'écrit: pour tout réel $0 < r$

$$\begin{cases} A\rho_p = F + \Lambda \\ \Lambda = (\Lambda - r\rho_p)^+ \end{cases}$$

que l'on résout itérativement avec l'algorithme convergeant pour r petit suivant: $\rho_p^0 = 0; \Lambda^0 = 0$

$$\begin{cases} A\rho_p^{n+1} = F + \Lambda^{n+1} \\ \Lambda^{n+1} = (\Lambda^n - r\rho_p^n)^+ \end{cases}$$

Nous prenons le même exemple que précédemment, et en utilisant la méthode de marche en temps alors la solution est représentée à la figure 2 pour un pas de temps et pour 20 pas de temps.

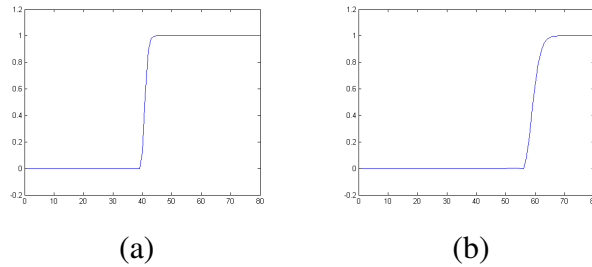


Figure 3: (a) Solution pour un pas de temps. (b) Solution pour 20 pas de temps.

4.2. Contrainte de régularité sur la variation totale

Afin de contrôler les oscillations, on propose d'imposer la positivité de la solution tout en pénalisant sa variation totale. Ceci revient à résoudre le problème discrétisé suivant :

$$\min_{V_h} \frac{1}{2} \int_Q (\partial_t u + (v(x, t) | \nabla u(x, t)) - f)^2 dt dx + I_{C_h}(u) + \lambda TV(u) \quad (4.2)$$

avec $\lambda > 0$, où $C_h = \left\{ u = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i \mid \alpha_i \geq 0, \forall i \right\}$ et où $TV(u) = \int_Q |\nabla u(x, t)| dx dt$. On propose, pour résoudre ce problème d'utiliser un algorithme de descente de gradient alterné de type ISTA (cf. [1]). La figure suivante illustre les résultats obtenus à $t = 0.3$.

5. Conclusion

La caractéristique importante de la méthode des éléments finis pour simuler des phénomènes de transport est son incapacité de satisfaire un principe du maximum sur des maillages globaux pour une formulation standard de Galerkin. Le schéma résultant donne lieu à des oscillations parasites (undershooting ou overshooting) ce qui est bien connue depuis longtemps dans la littérature de la dynamique des fluides. La méthode de Galerkin discontinue [7] et la méthode de Nitsche sont incapables d'éliminer ces oscillations, la méthode de multiplicateur de Lagrange généralisée permet d'éliminer les undershooting mais les overshooting persistent toujours, donc on conclut que la meilleure méthode pour contrôler ces artefacts est la méthode avec variation totale.

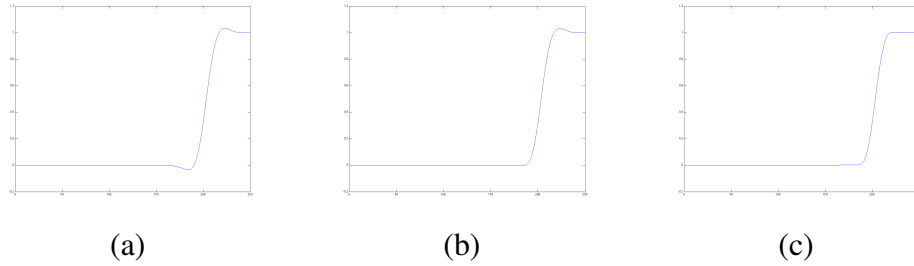


Figure 4: (a) Solution du problème sans méthode de marche . (b) Solution du problème avec la contrainte I_{C_h} , persistance de l'overshooting. (c) Solution du problème avec contrainte et régularisation TV pour $\lambda = 2.10^{-4}$.

References

- [1] A. Beck, M. Teboulle. *A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems*, *SIAM J. Img. Sci.*, (2009), 183-202
- [2] P. Bochev., D. Ridz al, G. Scovazzi, M. Shashkov. *Formulation, analysis and numerical study of an optimization-based conservative interpolation(remap) od sacalr fields for arbitrary Lagrangien-Eulerian method*, *Jour. Comp. Phys.*, **230** (2011), 5199-5225.
- [3] Horn., B. Schunck. *Determining optical flow*, *Artificial Intelligence.*, (1981).
- [4] D. Kuzmin. *Linearity-preserving flux correction and convergence acceleration for constrainde Galerkin schemees*, *Jour. of Comp. and Applied Math.*, **236** (2012), 2317-2337.
- [5] J. Pousin., O. Besson . *Solutions for Linear Conservation Laws with Velocity Fields*, *Archive of Ration. Mech. and Ana.*, **186** (2007), p. 159- 175 .
- [6] M. Rokafellar. *Variational analysis*, Springer, (2008).
- [7] H.De Sterck., A.Thomas et all. *Least Squares finite element methods and algebraic multigrid solvers for linear hyperbolic PDEs*, *SIAM J.SCI.COMPUT*, (2004), Vol.26,NO.1,pp.31-54.

Acknowledgements

This work was supported by the LABEX MILYON (ANR-10-LABX- 0070) of Université de Lyon, within the program **Investissements d'Avenir**(ANR-11-IDEX- 0007) operated by the French National Research Agency (ANR); and by the ANR 11-TecSan002-.

L'exposé sera présenté par Khadidja BENMANSOUR.